Μαθημα 22ο 22/5/2017

Τοπολογια

⊛ $(E_1,\rho_1),\dots,(E_k,\rho_k)$ μ.χ τοτε θεωρουμε τον (E,ρ) καρτεσιανο μ.χ
Αν καθενας απο τους $(E_1,\rho_1),\dots,(E_k,\rho_k)$ συμπαγες τοτε και ο (E,ρ) συμπαγης (και το αντιστροφο)

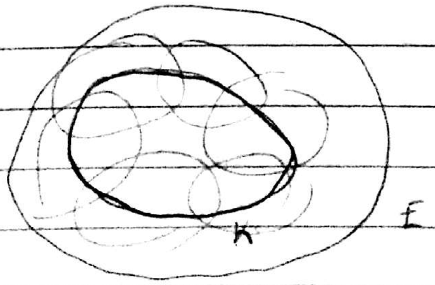
Παρατηρηση
(E,ρ) μ.χ με $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$

Είναι συμπαγής;

E πεπερασμενος $\Rightarrow$ E συμπαγης
E απειρο $\mathcal{C}=\{\{x\}: x\in E\}$ απειρη
$\cup\mathcal{C}=E$ (προφανη)
↳ Αυτης της καλυψης υπαρχει υποκαλυψη;
οχι, δεν υπαρχει καμια υποκαλυψη, η μονη που υπαρχει ειναι ο εαυτος ομως αυτη δεν ειναι απειρη.

→ Καθε συμπαγης συνολο ειναι κλειστο και φραγμενο

Προταση Στα κλειστα συνολα κληρονομειται η ιδ. συμπαγειας
Καθε κλειστο υποσυνολο ενος συμπαγους μ.χ ειναι συμπαγες
Αποδειξη
Εστω (E,ρ) συμπαγης μ.χ και K κλειστο υποσυνολο του E. Εστω $\mathcal{C}$ ανοιχτη εν E καλυψη του K



$\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{K^c\}$ καλυψη του E ανοιχτή

Υπαρχει πεπερασμενη υποκαλυψη, η $\hat{\hat{\mathcal{C}}}$ της $\hat{\mathcal{C}}$

Αρα $\hat{\hat{\mathcal{C}}} - \{K^c\}$ ειναι υποκαλυψη (πεπερασμενη) του E

Θεωρημα

Αν ειναι (E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) μ.χ και $f: E_1 \to E_2$ συναρτηση η f συνεχης. Τοτε αν (E_1,ρ_1) ειναι συμπαγης και το $R(f)$ ειναι συμπαγες υποσυνολο του E_2

Αποδειξη

Εστω A_i, $i \in I$ ανοιχτη εν E_2 καλυψη του $R(f)$

Δηλ ισχυει $R(f) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Τοτε $E_1 = f^{-1}(R(f)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup f^{-1}(A_i)$

Το $f^{-1}(A_i)$, $i \in I$ καλυψη του E_1 ανοιχτη

Αρα υπαρχει πεπερασμενη υποκαλυψη η $f^{-1}(A_i)$, $i \in J$ (πεπερασμενο) της πρωτης E_1

$R(f) = f(E_1) = f(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(A_i)) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(A_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$

Αρα δειξαμε το ζητουμενο $R(f)$ συμπαγες υποσυνολο του E_2

Θεωρημα

Ας ειναι (E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) μ.χ, $f: E_1 \to E_2$ συνεχης και $S \subseteq E_1$ συμπαγες. Τοτε η $f|S$ ειναι ομοιομορφα συνεχης

Αποδειξη

- f ομοιομ. συνεχης $\overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x,y \text{ εν } E_1)\ \rho_1(x,y) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ } θυμαμαι

Εμεις θελουμε $\forall x,y$ εν S

Θεωρουμε $\varepsilon > 0$ (τυχαν)

Τοτε επειδη η f συνεχης $(\forall a \in S)(\exists \delta_a > 0)(\forall x \in S)$: $\rho(x,a) < \delta_a \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$ (*)

$B_a = B(a, \delta_a/2)$, $a \in S$ ανοιχτη καλυψη του S

Υπαρχει ανοιχτη υποκαλυψη της B_a, $a \in S$, Εστω αυτη
$\{B_{a_1}, B_{a_2}, \dots, B_{a_k}\}$ δηλ $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{a_i}$
Θεωρουμε $\delta = \min\left\{ \frac{\delta_{a_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{a_k}}{2} \right\} > 0$

Θεωρω x, y εν S, με $\rho_1(x,y) < \delta$
$x \in S \Rightarrow \exists \lambda \in \{1, \dots, k\}$: $x \in B_{a_\lambda}$ δηλ $\rho_1(x, a_\lambda) < \frac{\delta_{a_\lambda}}{2}$

$\rho(y, a_\lambda) \leq \rho(y,x) + \rho(x, a_\lambda) < \delta + \frac{\delta_{a_\lambda}}{2} \leq \frac{\delta_{a_\lambda}}{2} + \frac{\delta_{a_\lambda}}{2} = \delta_{a_\lambda}$
$\rho_2(f(x), f(a_\lambda)) < \varepsilon/2$. $\rho_2(f(y), f(a_\lambda)) < \varepsilon/2$ $(*)$
$\rho_2(f(x), f(y)) \leq \rho_2(f(x), f(a_\lambda)) + \rho_2(f(a_\lambda), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Θεωρημα (χωρις αποδειξη)
Ενας μ.χ (E, ρ) ειναι συμπαγης αν και μονο αν καθε οικογενεια κλειστων υποσυνολων του E που εχει την ιδιοτητα των πεπερασμενων τομων (Ι.Π.Τ) εχει μη κενη τομη

Μια συλλογη $\mathcal{C}$ εχει Ι.Π.Τ $\overset{\text{ορ.}}{\iff}$ καθε πεπερασμενη υποσυλλογη $\hat{\mathcal{C}}$ της $\mathcal{C}$ ειναι τετοια ωστε $\bigcap \hat{\mathcal{C}} \neq \emptyset$

$\rightarrow A = \left(0, \frac{1}{\nu}\right]$, $\nu \in \mathbb{N}$

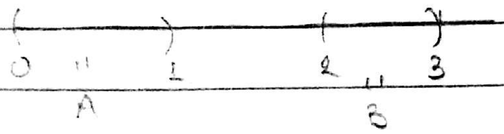
$\{A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_k}\}$ $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k$ (τα βαζω εγω ετσι)
Παιρνουμε τωρα $A_{\nu_1} \cap \dots \cap A_{\nu_k} = A_{\nu_k} \neq \emptyset$
$\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} A_{\nu} = \emptyset$

$(0,1] \cup [2,3)$

$(0,a]$

$(0,+\infty)$

$[a,+\infty)$



$(S = (0,1] \cup (2,3), \ |\cdot|_S)$

$\emptyset \neq A = (0,1]$

$\emptyset \neq B = (2,3)$ ανοιχτό στο S $\Big\}$ $\Rightarrow \{A, B\}$ ανοιχτό διαμερ. του S

$A \cup B = S$, A, B ξένα

$(0,1] = U \cap S$ αν. S

$\uparrow$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}$ $\quad U = (0, 2/3)$

$A = (0,1)$

$B = [1,2)$

$\mathbb{R}^2$, A συνεχής $\subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad f: \overbrace{(-\pi/2, \pi/2)}^{I} \to \mathbb{R}^2$

I συνεχής, f συνεχής $\Rightarrow f(I) = A$

$S \subseteq \mathbb{R}^2$, $S = A_1 \cup A_2$, S όχι συν στο $\mathbb{R}^2$

Θεωρούμε τη διαμέριση $\{A_1, A_2\}$ του S

$\emptyset \neq A_1$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = S$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Είναι η $\{A_1, A_2\}$ ανοιχτή στο S

Θεώρημα

Έστω (E,ρ) μ.χ. $(C_i)_{i\in I}$ οικογένεια συνεκτικών $\subseteq E$ και $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} C_i$ συνεκτικό

Απόδειξη

Έστω ότι $\bigcup_{i\in I} C_i$ όχι συνεκτικό $\Rightarrow \exists \{A,B\}$ ανοιχτό κάλυμμα στο E του $\bigcup_{i\in I} C_i$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)\neq\emptyset \\ B\cap\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)\neq\emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cap B)\cap\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)=\emptyset \quad (3)$$

$\exists\, a\in \bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$ (1)

$(a\in C_i)\ (\forall i\in I)$

$\bigcup_{i\in I} C_i \subseteq A\cup B \overset{(1)}{\Rightarrow} a\in A$ ή $a\in B$

χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε $a\in A$ αλλά $a\in C_i$ $\forall i\in I \Rightarrow C_i\cap A\neq\emptyset$ (2)

Ισχυρισμός $\forall i$ $C_i\cap B=\emptyset$

Με άτοπο, έστω $\exists\, i_0\in I : C_{i_0}\cap B\neq\emptyset$

Προφανώς $C_{i_0}\cap A\neq\emptyset$

$(A\cap B)\cap C_{i_0}=\emptyset$ λόγω (3)

$A\cup B\supseteq \bigcup C_i \supseteq \bigcup C_{i_0} \Rightarrow C_{i_0}$ όχι συνεκτικό άτοπο

$C_i\cap B=\emptyset \quad \forall i\in I$

$\bigcup_{i\in I}(C_i\cap B)=\emptyset$

$\left(\bigcup C_i\right)\cap B=\emptyset$

Scanned by CamScanner